บทความวิจัย

อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับกำแพงศักย์อนันต์

Path Integral for an Infinite Potential Barrier

อัฏฐชัย ถาวรสุวรรณ[*] วิทยา ทิพย์อักษร[**] และ นิคม ชูศิริ[***]

[*]กศ.บ.(วิทยาศาสตร์-ฟิสิกส์) นิสิตปริญญาโท ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

[**]วท.บ.(ฟิสิกส์) นิสิตปริญญาโท ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

[***]วท.ด.(ฟิสิกส์) รองศาสตราจารย์ ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

คำสำคัญ(keywords) : อินทิกรัลตามเส้นทาง(Path Integral), กำแพงศักย์อนันต์(Infinite Potential Barrier)

บทคัดย่อ

บทความนี้ศึกษาปัญหากำแพงศักย์อนันต์ในหนึ่งมิติโดยอาศัยวิธีอินทิกรัลตามเส้นทาง-ของฟายน์แมน ได้คำนวณตัวแผ่กระจายสำหรับกำแพงศักย์อนันต์โดยวิธีอินทิกรัลตามเส้นทางแบบลากรางเกียน ผลเฉลยที่ได้อาศัยวิธีจุดภาพของกระจกเงาซึ่งสมมูลกับการรวมเส้นทางแบบฉบับ ตัวแผ่กระจายที่ได้อยู่ในรูปแบบที่กระชับ และจากตัวแผ่กระจายดังกล่าวเราสามารถนำไปคำนวณหาสถานะเจาะจงโมเมนตัมและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคที่อยู่ภายใต้อิทธิพล-ของกำแพงศักย์อนันต์ได้

Abstract

In this paper we study an infinite potential barrier problem in one dimension using Feynman path integral approach. The propagator for the infinite potential barrier is calculated by means of the Lagrangian path integral. This solution uses an image point method equivalent to a sum over classical paths. The propagator is evaluated in a closed form, and from this propagator we obtained the momentum eigenstates and possible energy levels of a particle under the influence of an infinite potential barrier.

บทนำ

ในปี ค.ศ.1948 ฟายน์แมน[1] ได้เสนอกลศาสตร์ควอนตัมแนวใหม่ โดยเขาได้นำเสนอตัวแผ่กระจาย(propagator)ของอนุภาคซึ่งอยู่ในรูปของอินทิกรัลตามเส้นทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดของอนุภาค นับตั้งแต่นั้นเป็นต้นมากลศาสตร์ควอนตัมตามแบบฉบับของฟายน์แมนได้รับความสนใจจากนักฟิสิกส์เป็นจำนวนมาก ทั้งนี้เนื่องจากได้รับการพิสูจน์ว่าอินทิกรัลตามเส้นทางดังกล่าวมีประโยชน์ต่อวงการฟิสิกส์หลายสาขา อย่างไรก็ตามมีข้อเท็จจริงที่น่าประหลาดใจเป็นอย่างยิ่งว่าทฤษฎีของฟายน์แมนกลับขาดประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาบางปัญหา อาทิเช่น ปัญหาอิเล็กตรอนในศักย์คูลอมบ์ ปัญหากำแพงศักย์อนันต์ และปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อจัตุรัสลึกอนันต์ เป็นต้น กล่าวในเชิงประวัติศาสตร์ สำหรับปัญหาศักย์คูลอมบ์นั้น Ho และ Inomata[2] ประสบความสำเร็จในการสร้างรูปแบบการอินทิเกรตตามเส้นทางของอะตอมไฮโดรเจน โดยเขาทั้งสองสามารถคำนวณฟังก์ชันกรีน(Green's function)ของอิเล็กตรอนในรูปแบบที่กระชับ จากฟังก์ชันกรีนดังกล่าว Choosiri และ Sayakanit[3] สามารถคำนวณระดับพลังงานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันคลื่นของอะตอมไฮโดรเจนในสามมิติได้ ในปี ค.ศ. 1981 Goodman[4] ได้นำเสนอวิธีจุดภาพกระจกเงา (image point method) หลังจากที่ Goodman ได้นำวิธีจุดภาพกระจกเงาไปประยุกต์ใช้กับอินทิกรัลตามเส้นทางของปัญหากำแพงศักย์อนันต์ เขาสามารถคำนวณตัวแผ่กระจายของอนุภาคภายใต้กำแพงศักย์ดังกล่าวได้ สำหรับบทความนี้เราจะศึกษาวิธีการให้ได้มาซึ่งฟังก์ชันคลื่นหรือฟังก์ชันไอเกนและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคจากตัวแผ่กระจายดังกล่าว

ตัวแผ่กระจายและอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมน

ในกลศาสตร์ควอนตัม ข้อมูลเชิงพลวัต(dynamical information)ของระบบกลศาสตร์ควอนตัมนั้นบรรจุอยู่ในฟังก์ชันคลื่น โดยที่ฟังก์ชันคลื่นเป็นฟังก์ชันที่กำหนดคุณลักษณะความเป็นคลื่นที่คล้องจองกับอนุภาค ในทางปฏิบัติเราสามารถคำนวณฟังก์ชันคลื่นได้จากการแก้สมการชเรอดิงเงอร์(Schrodinger's equation) ตามแนวคิดของชเรอดิงเงอร์นั้น[5] ปรากฏมีเวกเตอร์สถานะ (state vector) $|\psi(t)\rangle$ ซึ่งมีพัฒนาการตามเวลาดังสมการ

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t')|\psi(t')\rangle \qquad (1)$$

โดยที่ $U(t,t')$ คือตัวดำเนินพัฒนาการตามเวลา(time evolution operator) ถ้าหากตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนของระบบมิได้เป็นฟังก์ชันของเวลาอย่างชัดแจ้งแล้วละก็ ตัวดำเนินการพัฒนาการตามเวลาจะอยู่ในรูป

$$U(t'',t') = \exp\left\{-\frac{i}{h}(t''-t')H\right\} \tag{2}$$

ในรูปของตัวแทนโครงแบบ(configuration representation) สมการ(1)กลับกลายเป็น

$$\langle \vec{x}''|\psi(t'')\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \vec{x}''|U(t'',t')|\vec{x}'\rangle\langle \vec{x}'|\psi(t')\rangle d^3x' \ , \tag{3}$$

โดยที่เราได้อาศัยเงื่อนไขการทำให้เป็นปกติ(normalization condition)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{x}'\rangle\langle \vec{x}'| d^3x' = 1 \tag{4}$$

เราสามารถเขียนสมการ(3)ในรูป

$$\psi(\vec{x}'',t'') = \int_{-\infty}^{\infty} K(\vec{x}'',t'';x',t')\psi(\vec{x}',t')d^3x' \tag{5}$$

โดยที่

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \langle \vec{x}''|U(t'',t')|\vec{x}'\rangle$$

และเรียกพจน์ดังกล่าวว่า "ตัวแผ่กระจาย" หรือแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นของอนุภาคในการเลื่อนตำแหน่งจาก $\vec{x}'$ ณ เวลา t' ไปยัง $\vec{x}''$ ณ เวลา t'' ตามความคิดของฟายน์แมนนั้นมีเส้นทางจำนวนนับไม่ถ้วนระหว่างจุดคู่ดังกล่าวที่อนุภาคสามารถเคลื่อนที่ได้ แอมปลิจูดความน่าจะเป็นรวมทั้งหมดเกิดจากการรวมแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นย่อยสอดคล้องกับของแต่ละเส้นทาง กล่าวคือ

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \sum_{\substack{\text{over all paths} \\ \text{from } \vec{x}' \text{ to } \vec{x}''}} \Phi[\vec{x}(t)] \tag{6}$$

การมีส่วนร่วมของแต่ละเส้นทางนั้นมีเฟสที่เป็นปฏิภาคโดยตรงกับแอคชัน(action) กล่าวคือ

$$\Phi[\vec{x}(t)] = \text{const.}e^{\frac{i}{h}S[\vec{x}(t)]} \tag{7}$$

โดยที่แอคชัน

$$S = \int_{t'}^{t''} L(\vec{x},\dot{\vec{x}})dt$$

และลากรางเกียน(Lagrangian)

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$$

โดยอาศัยพื้นฐานเชิงรูปหลายเหลี่ยม(polygonal basis)ของทฤษฎีการอินทิเกรต ตัวแผ่กระจายในสมการ(6)อาจเขียนอยู่ในรูป

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left(\frac{2\pi\hbar i\varepsilon}{m}\right)^{-3N/2} \int\int\ldots\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{m}{2\varepsilon}(\vec{x}_i-\vec{x}_{i-1})^2 - \varepsilon V(\vec{x}_i)\right]\right\} d^3x_1 d^3x_2 \ldots d^3x_{N-1} \tag{8}$$

ฟายน์แมนเขียนผลรวมการมีส่วนร่วมของทุกเส้นทางดังกล่าวในรูปที่กระทัดรัดกว่าดังนี้

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \int_{\vec{x}'}^{\vec{x}''} e^{\frac{i}{\hbar}S[\vec{x}'',\vec{x}']} D[\vec{x}(t)] \tag{9}$$

ซึ่งเขาเรียกนิพจน์ดังกล่าวว่า “อินทิกรัลตามเส้นทาง” นอกจากนั้นถ้าหากสเปกตรัมพลังงานของอนุภาคมีค่าไม่ต่อเนื่อง ตัวแผ่กระจายของสมการ(9)สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \sum_n \psi_n(\vec{x}'')\psi_n^*(\vec{x}')e^{-\frac{iE_n}{\hbar}(t''-t')} \tag{10}$$

และต่อกรณีที่สเปกตรัมของอนุภาคมีค่าต่อเนื่อง สมการ(9)กลับกลายเป็น

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\vec{x}'')\psi_k^*(\vec{x}')e^{-\frac{iE(k)}{\hbar}(t''-t')} d^3k \ . \tag{11}$$

จากสมการ(10)และ(11) เราจะเห็นได้ว่าตัวแผ่กระจายนั้นบรรจุข้อมูลเกี่ยวกับสถานะไอเกนและระดับพลังงานที่เป็นไปได้พร้อมๆกัน ยิ่งไปกว่านั้นสำหรับอนุภาคใดๆที่ลากรางเกียนมีสมบัติกำลังสอง(quadratic)ทั้งตำแหน่งและความเร็ว ตัวแผ่กระจายจะมีรูปแบบ $Fe^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}}$ โดยที่ F คือตัวประกอบข้างหน้าหรือตัวประกอบที่ทำให้เป็นปกติ(prefactor or normalizing factor) และ S_{cl} คือแอคชันแบบฉบับ ซึ่งก็คืออินทิกรัลของลากรางเกียนตามเส้นทางแบบฉบับ สำหรับตัวประกอบข้างหน้านั้นสามารถคำนวณได้โดยอาศัยสูตร[6,7]

$$F(t'',t') = \det\left[\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2}{\partial\vec{x}'\partial\vec{x}''}S_{cl}(\vec{x}'',\vec{x}')\right]^{1/2} \tag{12}$$

ปัญหากำแพงศักย์อนันต์

กำแพงศักย์อนันต์จัดเป็นปัญหาของสถานะที่มีขอบขอบเขตไม่จำกัด(unbounded-state problem) ที่ง่ายที่สุดปัญหาหนึ่งในกลศาสตร์ควอนตัม โดยทั่วไปแล้วมักปรากฏเป็นปัญหาตัวอย่างแรก ๆตัวอย่างหนึ่งในตำรากลศาสตร์ควอนตัมเบื้องต้นทั่วไป เป็นปัญหาของอนุภาคตัวหนึ่งที่เคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของศักย์

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x > 0 \\ \infty & \text{for} \quad x \le 0 \end{cases} \tag{13}$$

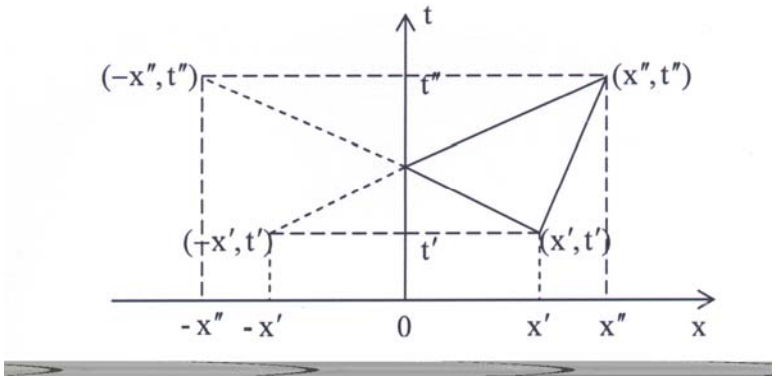
สถานะไอเกนโมเมนตัมต่อกรณีดังกล่าวมิได้เป็นไปตามแบบอย่างของอนุภาคอิสระ ทว่ากลับมีรูปแบบเป็น

$$\psi_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \sin\left(\frac{px}{h}\right) & \text{for} \quad x > 0 \\ 0 & \text{for} \quad x \le 0 \end{cases} \tag{14}$$

ด้วยการนำวิธีจุดภาพกระจกเงาไปประยุกต์ใช้กับทฤษฎีอินทิเกรตตามเส้นทาง ส่งผลให้ตัวแผ่กระจายของอนุภาคภายใต้กำแพงศักย์อนันต์สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= \left(\frac{m}{2\pi i h (t'' - t')} \right)^{1/2} \times \left[\exp\left(\frac{im(x'' - x')^2}{2h(t'' - t')} \right) - \exp\left(\frac{im(-x'' - x')^2}{2h(t'' - t')} \right) \right] \\ &= \langle x'', t'' | x', t' \rangle_F - \langle -x'', t'' | x', t' \rangle_F \ , \end{aligned} \tag{15}$$

โดยที่ตัวห้อย F ที่ปรากฏอยู่ในสมการ(15)นั้นบ่งชี้ถึงตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระ



รูปที่ 1 แสดงเส้นทางแบบฉบับสองเส้นทางที่เชื่อมต่อจุด (x', t') และ (x'', t'') พร้อมด้วยจุดภาพในกระจกเงาที่คล้องจองกัน

ผลลัพธ์ที่ได้ตามสมการ(15)นั้นมีเหตุผลในการอธิบายตามแนวคิดอินทิกรัลตามเส้นทางดังนี้ ด้วยสาเหตุที่อนุภาคนั้นมีอิสระในย่าน x>0 มันจึงมีพฤติกรรมที่ใกล้เคียงหรือเชื่อมโยงกับอนุภาคอิสระ เป็นที่ทราบกันดีว่าต่อกรณีอนุภาคอิสระนั้นตัวแผ่กระจายเขียนอยู่ในรูป $Fe^{\frac{i}{h}S_{cl}}$ ทว่าต่อกรณีกำแพงศักย์อนันต์นั้นกุญแจสำคัญที่นำไปสู่ความแตกต่างกับกรณีอนุภาคอิสระก็คือมีเส้นทางแบบฉบับจำนวนสองเส้นทาง(ดูรูปที่ 1 ประกอบ) เส้นทางแรกคือเส้นทางตามแบบอย่างของอนุภาคอิสระโดยเริ่มต้นจากจุด (x', t') ไปยังจุด (x'', t'') โดยตรง ในขณะที่เส้นทางที่สองคือเส้นทางที่อนุภาคกระทบกำแพงศักย์ก่อนแล้วสะท้อนกลับไปยังจุด (x'', t'') กล่าวในเชิงเรขาคณิตเส้นทางที่สองนั้นสามารถสร้างขึ้นมาได้ด้วยเริ่มต้นจากการสะท้อนจุด (x'', t'') รอบแกน $x = 0$

ได้ผลเป็นจุด $(-x'',t'')$ [แกน $x=0$ ทำหน้าที่เป็นกระจกเงาสะท้อนจุด (x'',t'')] ต่อมาสร้างเส้นทางแบบฉบับของอนุภาคอิสระด้วยการลากเส้นตรงจากจุด (x',t') ไปยังจุด $(-x'',t'')$ หลังจากนั้นสร้างเส้นทางสะท้อนกลับไปยังจุด (x'',t'') ส่งผลให้เส้นทางที่ผ่านการสะท้อนนั้น $x \geq 0$ ทุกๆ ตำแหน่ง ในทางกลับกันเราอาจสร้างเส้นทางดังกล่าวด้วยการสะท้อนจุด (x',t') รอบแกน $x=0$ ได้เช่นเดียวกัน และเส้นทางแบบฉบับเส้นที่สองย่อมได้ผลเช่นเดียวกับกรณีแรก ทว่ากรณีนี้สอดคล้องกับข้อเท็จจริงที่ว่าพจน์ที่สองของสมการ(15)ถูกเขียนอยู่ในรูป $\langle x'',t''|-x',t'\rangle_F$ แทนที่จะเป็น $\langle -x'',t''|x',t'\rangle_F$ อย่างไรก็ตามเพื่อความสะดวก ตั้งแต่บัดนี้เป็นต้นไปเราจะพิจารณาเฉพาะการสะท้อนที่จุดปลาย (x'',t'') เท่านั้น ด้วยการประยุกต์ใช้หลักการซ้อนทับ(superposition principle) เราคาดหวังว่าตัวแผ่กระจายเป็นผลรวมของการมีส่วนร่วมของทั้งสองเส้นทางแบบฉบับ ซึ่งก็คือตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระจาก (x',t') ไปยัง (x'',t'') และจาก (x',t') ไปยัง $(-x'',t'')$ โดยกำแพงศักย์อาจมีผลกระทบต่อเส้นทางที่ผ่านการสะท้อนบ้างตามสมควร สมการ(15)ยืนยันความคาดหวังดังกล่าวว่าถูกต้องโดยชี้ให้เห็นว่าผลของกำแพงที่มีต่อเส้นทางที่ผ่านการสะท้อนนั้นทำให้พจน์ที่สองของสมการ(15)ต้องคูณด้วยตัวประกอบเฟส -1 ตัวประกอบเฟสดังกล่าวอาจคิดได้ว่าบังเกิดขึ้นจากการสะท้อนตรงปลายขอบของฟังก์ชันคลื่น ณ ตำแหน่งผนัง

สถานะเจาะจงโมเมนตัมและระดับพลังงานที่เป็นไปได้

บัดนี้เรามาพิจารณาสถานะเจาะจงโมเมนตัมและระดับพลังงานของอนุภาคภายใต้กำแพงศักย์อนันต์จากตัวแผ่กระจายที่ได้ตามสมการ(15) โดยอาศัยสูตร[8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ibx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/4a} \tag{16}$$

เราสามารถแปลงตัวประกอบเลขชี้กำลังในสมการ(15)ให้อยู่ในรูปอินทิกรัล :

$$\exp\left(\frac{im}{2\hbar(t''-t')}(\pm x''-x')^2\right) = \left(\frac{i\hbar(t''-t')}{2m\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\hbar}{2m}(t''-t')k^2+i(\pm x''-x')k}dk \tag{17}$$

โดยที่ k คือเลขคลื่นของอนุภาคซึ่งสัมพันธ์กับโมเมนตัมผ่านสมการ $p=\hbar k$ ด้วยการแทนสมการ(17)ลงในสมการ(15) ได้ผล

$$\langle x'',t''|x',t'\rangle = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t''-t')}\right)^{1/2}\left(\frac{i\hbar(t''-t')}{2m\pi}\right)^{1/2}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\hbar}{2m}(t''-t')k^2}(e^{i(x''-x')k}-e^{i(-x''-x')k})dk$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\hbar}{2m}(t''-t')k^2} \sin(kx'')\sin(kx')dk \qquad (18)$$

ในรูปของตัวแทนอวกาศโมเมนตัม(momentum-space representation) สมการ(18)กลับกลายเป็น

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \frac{1}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t''-t')} \sin(\tfrac{p}{\hbar}x'')\sin(\tfrac{p}{\hbar}x')dp \qquad (19)$$

เมื่อนำสมการ(19)เปรียบเทียบกับสมการ(11) เราย่อมได้สถานะเจาะจงโมเมนตัมดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \psi_p(x'') &= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}}\sin(\tfrac{p}{\hbar}x'') \\ \psi_p^*(x') &= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}}\sin(\tfrac{p}{\hbar}x') \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

พร้อมด้วยระดับพลังงานที่ต่อเนื่องที่เป็นไปได้ $E(p) = \frac{1}{2m}p^2$ ผลลัพธ์ที่ได้ดังกล่าวสอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับที่ได้โดยอาศัยการแก้สมการชเรอดิงเงอร์[ดูสมการ(14)ประกอบ]

สรุปและอภิปรายผล

ผลเฉลยของปัญหากำแพงศักย์อนันต์นั้นเป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้ว ดังนั้นโดยตัวผลเฉลยเองนั้นมิได้มีความสำคัญเป็นพิเศษแต่ประการใด ปัญหาหลักก็คืออินทิกรัลตามเส้นทางตามแบบของฟายน์แมนสามารถจัดการกับปัญหาดังกล่าวได้หรือไม่ เป็นที่ประจักษ์กันดีว่าทฤษฎีอินทิกรัลตามเส้นทางนั้นสามารถใช้ได้ผลดีต่อกรณีที่อินทิกรัลมีรูปแบบเป็นเกาส์เซียนและขอบเขตของการอินทิเกรตจะต้องไม่จำกัดเท่านั้น สิ่งที่ได้แสดงในบทความนี้คือการนำแนวคิดวิธีจุดภาพกระจกเงาไปประยุกต์ใช้กับอินทิกรัลตามเส้นทางของปัญหากำแพงศักย์อนันต์ กุญแจสำคัญของแนวคิดดังกล่าวในปัญหานี้ก็คือมีเส้นทางแบบฉบับจำนวนสองเส้นทาง โดยเส้นทางแรกคือเส้นทางของอนุภาคอิสระที่อนุภาคเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น (x', t') ไปยังจุดปลาย (x'', t'') โดยตรง ในขณะที่เส้นทางที่สองนั้นเป็นเส้นทางที่อนุภาคเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น (x', t') ไปยังผนังสะท้อนก่อนแล้วจึงสะท้อนกลับไปยังจุดปลาย (x'', t'') โดยเส้นทางที่สองนั้นสมมูลกับเส้นทางของอนุภาคอิสระที่เคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น (x', t') ไปยังจุด $(-x'', t'')$ จากตัวแผ่กระจายที่ได้ทำให้เราสามารถคำนวณหาสถานะเจาะจงโมเมนตัมและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคในระบบดังกล่าวได้

เอกสารอ้างอิง

(1) Feynman, R.P. and Hibbs, A.R.1965. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill. New York.

(2) Ho, R. and Inomata, A. 1982. *Phys. Rev. Lett*., 48(4) : 231.

(3) Choosiri, N. and Sayakanit, V. 1984. Path Integrals of the Hydrogen Atom. *Thai Journal of Physics*., 1(1) 1-13.

(4) Goodman, M. 1981. Path Integral Solution of the Square Well. *Am. J. Phys*., 49(9) :843

(5) Messiah, A. 1961. *Quantum Mechanics I* . Wiley. New York.

(6) Pauli, W. 1952. *Ausgewalte Kapitel de Feldquantiserung (Lecture note)*.Zurich : ETH. 139.

(7) van Vleck, J.H. 1978. Proc. *Natn. Acad. Sci.*.,14(178) .

(8) Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. 1965. *Table of Integrals, Series and Products*. 4th ed. Acadamic Press. New York.