บทความวิชาการ

# อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต : การพิสูจน์หกวิธี

# A.M.-G.M. Inequality : Six Proofs

**ศิริกัญญา กิตติวุฒิ**

**นิสิต ป. บัณฑิต มหาวิทยาลัยทักษิณ**

**รองศาสตราจารย์ ดร. สมใจ จิตพิทักษ์**

**ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ**

**1. บทนำ (Introduction)** มัชฌิม (mean) ของจำนวนจริงบวกสองจำนวน a, b มีหลายรูปแบบ อาทิ $(a+b)/2$, $\sqrt{ab}$, $2/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, $(b-a)/\ln(b/a)$ และ $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$ เป็นต้น มัชฌิมเหล่านี้มีชื่อเรียกตามลำดับคือ มัชฌิมเลขคณิต (arithmetic mean : A.M.) มัชฌิมเรขาคณิต (geometric mean : G.M.) มัชฌิมฮาร์มอนิก (harmonic mean : H.M.) มัชฌิมลอการิทึม (logarithmic mean : L.M.) และมัชฌิมกำลังสอง (quadratic mean : Q.M.) กรณีมัชฌิมลอการิทึมนิยามได้ก็ต่อเมื่อ $a \neq b$ ความสัมพันธ์ระหว่างมัชฌิมที่กล่าวแล้วนี้คือ เมื่อ $a, b > 0, a \neq b$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad (a)$$

หรือ

$$H(a,b) < G(a,b) < L(a,b) < A(a,b) < Q(a,b) \qquad (a')$$

กรณีมีจำนวนจริงบวกมากกว่าสองจำนวน มัชฌิมที่กล่าวข้างต้นนิยามได้ ยกเว้นมัชฌิมลอการิทึม ดังนั้นนัยทั่วไปของอสมการ (a) คือ เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \le \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \qquad (b)$$

หรือ

$$H_n \le G_n \le A_n \le Q_n \qquad (b')$$

การเท่ากันเกิดขึ้นเมื่อ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

สารัตถะสำคัญของอสมการ (b) อยู่ที่คู่กลางคือ

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = A_n \qquad (c)$$

หรือสั้น ๆ

$$G \le A \qquad (c')$$

อสมการ (c) รู้จักกันในชื่อ **อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต** (arithmetic-geometric mean inequality : A.M.-G.M. inequality)

การพิสูจน์อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิตทำได้หลายวิธี ในบทความเชิงปริทัศน์ (expository review article) นี้ได้รวบรวมนำเสนอการพิสูจน์หกวิธี เริ่มที่วิธีคลาสสิกที่โคชี (A. L. Cauchy1789-1857) ได้พิสูจน์ไว้เมื่อร้อยกว่าปีที่แล้วจนถึงวิธีใหม่ ๆ ที่เพิ่งเผยแพร่ในวารสารวิชาการต่างประเทศ โดยบางวิธีน่าจะยังไม่เป็นที่รู้จักกันแพร่หลาย

**2. พื้นฐานเบื้องต้น (Preliminaries)** อสมการพื้นฐานที่สำคัญที่สุดในคณิตศาสตร์คือ $x^2 \ge 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้นสำหรับ $a, b > 0$ จะได้ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0$ หรือ

$$\frac{a + b}{2} \ge \sqrt{ab} \qquad (d)$$

นั่นคือ

$$A(a, b) \ge G(a, b) \qquad (d')$$

การเท่ากันเกิดขึ้นเมื่อ a = b

โดยประยุกต์ (d) เข้ากับ $1/a$, $1/b$ จะได้

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\Big/2 \ge \sqrt{\frac{1}{a}\,\frac{1}{b}}$$

หรือ

$$\sqrt{ab} \ge 2\Big/\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \qquad (e)$$

นั่นคือ

$$G(a, b) \ge H(a, b) \qquad (e')$$

จาก (d) จะได้ $a^2 + b^2 \ge 2ab$ ดังนั้น

$$\frac{a^2+b^2}{2} \text{ ณ } \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

หรือ

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ ณ } \frac{a+b}{2} \qquad (f)$$

นั่นคือ

$$Q(a,b) \text{ ณ } A(a,b) \qquad (f\text{ข})$$

ในการพิสูจน์อสมการ

$$G(a,b) < L(a,b) < A(a,b) \qquad (g)$$

เมื่อ $0 < a < b$ วิธีหนึ่ง (ในหลาย ๆ วิธี) คือ ใช้อสมการ

$$\tanh x < x < \sinh x \qquad (h)$$

โดยที่

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ และ } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (h\text{ข})$$

แทน $x = \ln(b/a)$ ใน (h) จะได้ (g)

ในการพิสูจน์ตอนต่อไปบางวิธี ต้องใช้ความรู้พื้นฐานจากแคลคูลัสบางประการต่อไปนี้

ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $f(x) = e^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้บน ก (เซตจำนวนจริง) นั่นคือ

$$e^a < e^b \text{ ก็ต่อเมื่อ } a < b \qquad (i)$$

สำหรับทุก $a, b$ ฮ ก

อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin's series) สำหรับ $e^x$ คือ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad |x| < \text{ค} \qquad (j)$$

ดังนั้น

$$e^x \text{ ณ } 1 + x \qquad (j\text{ข})$$

ฟังก์ชัน $f: I$ ฎ ก โดยที่ I เป็นช่วงและ $I$ อ ก และ f หาอนุพันธ์ได้ถึงอนุพันธ์อันดับสองบน I จะได้ $f(x_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ของ f บน I ก็ต่อเมื่อ $f\text{ข}(x_0) = 0$ และ $f\text{ฃ}(x_0) < 0$

**3. ผลลัพธ์หลัก (Main Results)** จุดหมายสำคัญของหัวข้อนี้คือ การพิสูจน์ทฤษฎีบทอสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต จากหลากหลายวิธีรวมหกวิธี

**ทฤษฎีบท (อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต : A.M.-G.M. inequality)** ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \qquad (1)$$

หรือ

$$G_n \le A_n \qquad (1ข)$$

การเท่ากันเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

**การพิสูจน์**

(I) การพิสูจน์ (1) โดยวิธี**อุปนัยเชิงอนันต์** (transfinite induction) เครดิตเบื้องต้นได้แก่ โคชี (A. L. Cauchy 1789-1857) แนวการพิสูจน์ต่อไปนี้ได้จาก คาซารินอฟ (Kazarinoff, 1961)

เราพิสูจน์ (1) หรือ

$$a_1 \ldots a_n \le \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \qquad (1ข)$$

เมื่อ n อยู่ในรูปกำลังของ 2 ก่อน นั่นคือเมื่อ $n = 2^k$, k เป็นจำนวนเต็มบวก

เมื่อ $k = 1$ นั่นคือ $n = 2$ จะได้

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$$

ดังนั้น

$$a_1 a_2 \le \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$$

ในทำนองเดียวกัน

$$a_3 a_4 \le \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2$$

เมื่อ $k = 2$ นั่นคือ $n = 4$ จะได้

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \le \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \le \left(\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$$

สมมติให้ อสมการ $A_n \geq G_n$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2^k$, $k \geq 2$ ต้องการพิสูจน์ว่า $A_n \geq G_n$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2^{k+1}$ นั่นคือ

$$a_1 \cdots a_{2^{k+1}} = (a_1 \cdots a_{2^k})(a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}) \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k} \cdot \left(\frac{a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k}$$

แต่

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}\right)\left(\frac{a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^2$$

เพราะฉะนั้น

$$a_1 \cdots a_{2^{k+1}} \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

นั่นคือ $A_n \geq G_n$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2^{k+1}$ โดยหลักการอุปนัย จะได้ $A_n \geq G_n$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2^k$ ทุก $k \in \mathbb{N}$

ถ้า $n$ ไม่อยู่ในรูป $2^k$ ให้ $2^m$ คือจำนวนเต็มบวกจำนวนแรกที่มากกว่า $n$ และให้ $2^m - n = k$ ดังนั้นโดยการประยุกต์ของการพิสูจน์ข้างต้นเข้ากับ $a_1, \ldots, a_n, \underbrace{A_n, \ldots, A_n}_{k \text{ terms}}$,

จะได้

$$(a_1 \cdots a_n)A_n^k \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + kA_n}{2^m}\right)^{2^m} = \left(\frac{nA_n + kA_n}{2^m}\right)^{2^m} = A_n^{2^m}$$

หรือ $G_n^n A_n^k \leq A_n^{2^m}$ ซึ่งจะได้ $G_n^n \leq A_n^n$ ดังนั้น

$$G_n \leq A_n$$

และ $G_n = A_n$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = \cdots = a_n$

(II) การพิสูจน์ (1) โดยวิธี**อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์** (mathematical induction) ต่อไปนี้ แนวคิดหลักได้จาก ฮิลแมน และอเล็กซานเดอร์สัน (Hillman and Alexanderson, 1966)

กรณี $n = 1$ จะได้ว่า $A_1 = a_1$ และ $G_1 = a_1$ ดังนั้น

$$A_1 = a_1 \geq a_1 = G_1$$

กรณี $n = 2$ จาก $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ จะได้

$$A_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} = G_2$$

และ $A_2 = G_2$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2$

สมมติให้ อสมการ $A_n$ ณ $G_n$ เป็นจริงเมื่อ $n = k$ ต้องการพิสูจน์ว่า $A_{k+1}$ ณ $G_{k+1}$

ถ้า $a_1 = \ldots = a_k = a_{k+1} = a$ แล้ว $A_{k+1} = \dfrac{(k+1)a}{k+1} = \sqrt[k+1]{a^{k+1}} = G_{k+1}$ นั่นคือ

$A_{k+1}$ ณ $G_{k+1}$ ในกรณี $0 < a_1$ ฆ $a_2$ ฆ $a_3$ ฆ $\ldots$ ฆ $a_{k+1}$ และ $a_1 < a_{k+1}$ จะได้ว่า

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k < a_{k+1} + \ldots + a_{k+1} = k a_{k+1}$$

ดังนั้น

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < a_{k+1}$$

นั่นคือ $A_k < a_{k+1}$ เพราะฉะนั้น

$$A_{k+1} = \frac{a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1} = \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1}$$

$$= \frac{(k+1)A_k + (a_{k+1} - A_k)}{k+1} = A_k + \frac{a_{k+1} - A_k}{k+1}$$

ให้ $(a_{k+1} - A_k)/(k+1) = p$ จาก $a_{k+1} > A_k$ จะได้ว่า $\dfrac{a_{k+1} - A_k}{k+1} > 0$ หรือ $p > 0$

ดังนั้น จาก $A_{k+1} = A_k + p$ จะได้ว่า

$$(A_{k+1})^{k+1} = (A_k + p)^{k+1} = (A_k)^{k+1} + (k+1)(A_k)^k p + \ldots + p^{k+1}$$

จาก $p > 0$ และ $A_k > 0$ จะได้ว่า แต่ละพจน์ทางขวามีค่าเป็นบวก และ

$$(A_{k+1})^{k+1} > (A_k)^{k+1} + (k+1)p(A_k)^k$$

แทน $(k+1)p = a_{k+1} - A_k$ จะได้ว่า

$$(A_{k+1})^{k+1} > (A_k)^{k+1} + a_{k+1}(A_k)^k - (A_k)^{k+1}$$

$$(A_{k+1})^{k+1} > a_{k+1}(A_k)^k$$

จากสมมติฐาน $A_k$ ณ $G_k$ จะได้ว่า

$$(A_{k+1})^{k+1} > a_{k+1}(A_k)^k \text{ ณ } a_{k+1}(G_k)^k = a_{k+1}(a_1 a_2 \ldots a_k) = (G_{k+1})^{k+1}$$

นั่นคือ

$$(A_{k+1})^{k+1} > (G_{k+1})^{k+1}$$

ซึ่งจะได้ว่า $A_{k+1} > G_{k+1}$ โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $A_n$ ณ $G_n$ ทุก $n$ ฮ ค

(III) การพิสูจน์ (1) วิธีที่สาม แนวคิดหลักได้จาก สตรอมเบอร์ก (Stromberg, 1980) โดยอาศัยบทตั้ง (lemma) ต่อไปนี้

**บทตั้ง** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และให้ $b_1, \ldots, b_n$ เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากันทั้งหมด โดยที่ผลคูณ $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$ จะได้ $b_1 + b_2 + \ldots + b_n > n$

**การพิสูจน์** กรณี $n = 2$ เนื่องจาก $b_1$ น $b_2$ จะได้

$$0 < \left(\sqrt{b_1} - \sqrt{b_2}\right)^2 = b_1 + b_2 - 2\sqrt{b_1 b_2} = b_1 + b_2 - 2$$

ดังนั้นบทตั้งเป็นจริงเมื่อ $n = 2$

สมมติบทตั้งเป็นจริงที่ $n = k, k > 1$ เราจะพิสูจน์ว่าบทตั้งเป็นจริงที่ $n = k + 1$ เนื่องจาก $b_j$ ไม่เท่ากันทั้งหมด สมมติให้ $b_1$ ฆ $b_j$ ฆ $b_{k+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, k + 1)$ และ $b_1 < b_{k+1}$ ดังนั้น

$$b_1 < 1 < b_{k+1} \tag{2}$$

เพราะมิฉะนั้นจะได้ $b_1 b_2 \ldots b_{k+1}$ น 1 จากสมมติฐานบทตั้งเป็นจริงที่ $n = k$ และ $(b_1 b_{k+1}) b_2 \ldots b_k = 1$ จะได้

$$b_1 b_{k+1} + b_2 + \ldots + b_k \text{ ณ } k \tag{3}$$

โดยที่สมการเกิดได้เมื่อแต่ละพจน์ทางซ้ายของ (3) เท่ากัน และต่างเท่ากับ 1 จาก (2) จะได้

$$(b_{k+1} - 1)(1 - b_1) > 0 \tag{4}$$

จาก (3) และ (4) จะได้

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k + b_{k+1} = (b_1 b_{k+1} + b_2 + \ldots + b_k)$$

$$+ 1 + (b_{k+1} - 1)(1 - b_1)$$

$$\text{ณ } k + 1 + (b_{k+1} - 1)(1 - b_1) > k + 1$$

ดังนั้นบทตั้งเป็นจริงเมื่อ $n = k + 1$ โดยการอุปนัยจะได้บทตั้งเป็นจริงทุก $n > 1$

□

ในการพิสูจน์ (1) สมมติ $n > 1$ และ $a_1 < a_n$ ให้ $G = G_n$ จะได้ $G > 0$ ให้ $b_j = a_j / G$, $j = 1, 2, \ldots, n$ จะได้

$$b_1 b_2 \ldots b_n = a_1 a_2 \ldots a_n / G^n = 1$$

โดยที่ $b_j > 0$ ทุก $j$ และ $b_1 < b_n$ ดังนั้นโดยบทตั้ง จะได้

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n > n$$

หรือ

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/G > n$$

นั่นคือ

$$A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} > G = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = G_n$$

(IV) การพิสูจน์ (1) วิธีที่สี่ พอลยา (G. Polya, 1887-1985) ได้พิสูจน์อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต (ราวปี 1934) โดยใช้สองพจน์แรกของอนุกรมแมคลอรินสำหรับ $e^x$ นับเป็น "very ingenious proof" (Alexanderson, 2000) รายละเอียดมีดังนี้

Given that $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, $G = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}$, $e^x \geq 1 + x$, $a_i \geq 0$, consider the inequalities $e^{\frac{a_i}{A} - 1} \geq \frac{a_i}{A}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Then $\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{a_i}{A} - 1} \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A}$ so $e^{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A} - n\right)} \geq \frac{G^n}{A^n}$, $e^{\frac{nA}{A} - n} \geq \frac{G^n}{A^n}$. Then $A^n \geq G^n$ and $A \geq G$.

(V) การพิสูจน์ (1) วิธีที่ห้า แนวคิดหลักได้จาก ชุมเบอร์เกอร์ (Schaumberger, 1989) โดยอาศัยบทตั้งต่อไปนี้

**บทตั้ง** ถ้า $x > 0$ แล้ว $e^x \geq x^e$

**การพิสูจน์** ให้ $x > 0$ และ $f(x) = x^{1/x}$ หาอนุพันธ์ (ใส่ ln แล้วหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย) จะได้

$$f'(x) = x^{1/x}\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) = f(x)\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$$

ซึ่ง $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\ln x = 1$ หรือ $x = e$ และ

$$f''(x) = f'(x)\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) + f(x)\left(\frac{-3 + 2\ln x}{x^3}\right)$$

ซึ่ง $f''(e) < 0$ ดังนั้น $f(x) = x^{1/x}$ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = e$ ซึ่งจะได้

$$e^{1/e} \geq x^{1/x}$$

หรือ

$$e^x \geq x^e \qquad (5)$$

การเท่ากันเกิดได้ก็ต่อเมื่อ $x = e$

□

ในการพิสูจน์ (1) แทน $x = a_1 e/G$ , $x = a_2 e/G$ , . . . , $x = a_n e/G$ ใน (5) ในบทตั้งและคูณอสมการที่ได้เข้าด้วยกัน จะได้

$$e^{(a_1 e/G + \ldots + a_n e/G)} \geq \left(\frac{a_1 e}{G} \ldots \frac{a_n e}{G}\right)^e \tag{6}$$

หรือ

$$e^{nAe/G} \geq \left(\frac{e^n G^n}{G^n}\right)^e = e^{ne} \tag{7}$$

จากสมบัติของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง จะได้

$$nAe/G \geq ne$$

หรือ $A \geq G$ นั่นคือ

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

(VI) การพิสูจน์ (1) โดยวิธีที่หก แนวคิดได้จากบทความของ Pecaric และ Varosanec (1997) ซึ่งอ้างบทความของ Sandor และ Szabo (1996) (ต่างมาจากประเทศโครเอเชีย) ว่าได้พบอสมการ

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^{b_i} \leq \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} b_i}{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} b_i} \tag{8}$$

และ

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} b_i}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^{b_i / \sum_{i=1}^{n} b_i} \tag{9}$$

โดยที่ $a_i, b_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ เป็นอสมการใหม่

อสมการ (8) สมมูลกับอสมการ (10) :

$$G_n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p_i / \sum_{i=1}^{n} p_i}\right) \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i a_i}{\prod_{i=1}^{n} p_i} = A_n \tag{10}$$

กล่าวคือ เมื่อแทนใน (8) ด้วย $b_i := p_i$, $a_i := p_i a_i$ จะได้ (10) และในทางกลับกัน แทนใน (10) ด้วย $a_i := a_i / b_i$, $p_i := b_i$ จะได้ (8)

□

[หมายเหตุ ใน(10) ถ้า $p_i$ ทุกตัวเท่ากับ 1 จะได้ $G_n \leq A_n$ แต่ถ้า $p_i$ ไม่เท่ากับ 1 ทั้งหมด (10) จะเป็น Weighted A.M.-G.M. ]

**4. สรุปและเสนอแนะ (Conclusion and Recommendations)** ในบทความนี้ได้นำเสนอการพิสูจน์อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต วิธีต่าง ๆ รวมหกวิธี โดยเริ่มที่วิธีคลาสสิกของโคชี ซึ่งให้แนวพิสูจน์ไว้เมื่อเกือบสองศตวรรษก่อน จนถึงวิธีพิสูจน์ใหม่ ๆ ในช่วงทศวรรษนี้ ยังมีวิธีพิสูจน์วิธีอื่นอีก ซึ่งอาจค้นได้จากเอกสารอ้างอิง ผู้อ่านอาจลองพิสูจน์อสมการ

$$H_n \leq G_n \text{ และ } A_n \leq Q_n$$

เป็นผลสืบเนื่องจาก $G_n \leq A_n$ หรือดัดแปลงการพิสูจน์จากบางแนวทางที่ได้นำเสนอมาแล้ว

**5. คำขอบคุณ (Acknowledgement)** ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่บรรณาธิการเชิญเป็นผู้อ่านและประเมินคุณภาพบทความ (referee) และให้คำแนะนำในการปรับปรุงแก้ไข และขอขอบคุณภาควิชคณิตศาสตร์ที่เอื้อเฟื้ออุปกรณ์และสิ่งอำนวยความสะดวกในการเตรียมบทความ

**6. เอกสารอ้างอิง (References)**

(1) Alexanderson, G. L. 2000. *The Random Walks of George Polya.* Washington DC. : The Mathematical Association of America.

(2) Hillman, A. P. and Alexanderson, G. L. 1966. *Algebra Through Problem Solving*. Boston : Allyn and Bacon, lnc.

(3) Kazarinoff, N. D. 1961. *Analytic Inequalities*. New York : Holt, Rinehart and Winston.

(4) Pecaric, J. and Varosanec, S. 1997. A New Proof of the Arithmetic Mean –The Geometric Mean Inequality. *J. Math. Anal. Appl*. 215 : 577-578.

(5) Schaumberger, N. 1989. The A.M.-G.M. Inequality via $x^{1/x}$. *College Math. Journal*. 20(4):320.

(6) Stromberg, K. 1980. *An Introduction to Classical Real Analysis*. California : Wadsworth.